

Wachstumsprozesse

Natürliches Wachstum
Größenbeschränktes Wachstum
~~Logistisches Wachstum~~
Differenzialgleichungen



Natürliches/exponentielles Wachstum

Natürliches Wachstum wird in der Regel durch eine Exponentialfunktion ausgedrückt:

$$f(t) = c \cdot a^t$$

Dabei ist ...

- t der Zeitpunkt der Messung bzw. der Beobachtung.
- $f(t)$ der gemessene Wert bzw. Bestand.
- c der **Anfangsbestand** zum Zeitpunkt $t = 0$.
- a der **Wachstumsfaktor** bzw. die **Zerfallrate**.
- Die Funktion $f(t)$ wird **Wachstumsfunktion** genannt.

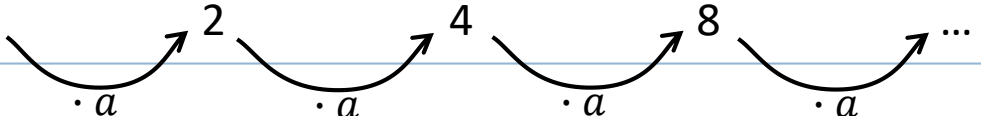
Die Wachstumskonstante

Eine allgemeine Exponentialfunktion ist bei Berechnungen schlecht handhabbar, daher wandelt man diese um in eine e -Funktion.

- Die e -Funktion macht weniger Arbeit, da sie beispielsweise beim Ableiten erhalten bleibt.
- Setzt man $a = e^k$, so wird $f(t) = c \cdot a^t$ zu $f(t) = c \cdot e^{kt}$.
- Aus dem Ansatz $a = e^k$ lässt sich das k durch Auflösen bestimmen und es gilt $k = \ln(a)$.
- Man nennt k die **Wachstumskonstante**, falls $k > 0$ bzw. **Zerfallskonstante**, falls $k < 0$ ist.

Natürliches Wachstum feststellen

t	0	1	2	3	4
Messwert	1	2	4	8	...



The diagram illustrates the growth of the measurement values over time. It shows a sequence of values: 1 at t=0, 2 at t=1, 4 at t=2, 8 at t=3, and an ellipsis at t=4. Curved arrows connect the values from t=0 to t=1, t=1 to t=2, t=2 to t=3, and t=3 to t=4. Each arrow is labeled with a dot and the letter 'a' below it, indicating that each value is multiplied by the same factor 'a' to get the next value.

Wenn sich jeder Messwert aus seinem Vorgänger durch Multiplikation mit demselben Faktor a ergibt, so handelt es sich um natürliches Wachstum und wir können als Bildungsgesetz die Formel $f(t) = ce^{kt}$ verwenden.

Dabei ist $k = \ln(a)$ für ein beliebig gewähltes und $c = f(0)$ der Anfangsbestand zu Beginn der Messung.

Kenngößen

Wichtige Kenngößen beim natürlichen Wachstum sind die **Halbwertszeit t_H** und die **Verdopplungszeit t_V** .

Übliche Fragestellungen in diesem Zusammenhang:

- Wie lange dauert es bis sich eine Bakterienkultur verdoppelt hat?
- Wie lange braucht ein radioaktiver Stoff bis er zur Hälfte zerfallen ist?
- Wie lange dauert es, bis ein Kondensator zur Hälfte entladen ist?

Kenngößen

Ausgehend von den Ansätzen $f(t + t_H) = \frac{1}{2}f(t)$ und $f(t + t_V) = 2f(t)$ leitet man in der Schule (durch Auflösen nach t_H bzw. t_V) Formeln für die Halbwertszeit und die Verdopplungszeit her:

$$t_H = -\frac{\ln(2)}{k}$$

$$t_V = \frac{\ln(2)}{k}$$

Wie man sieht ergeben sich beide Kenngößen direkt aus der Wachstumskonstanten k .

Umgang mit Prozentangaben

Häufig werden Zu- oder Abnahmen in Prozent angegeben.

Beispiel Kapitalverzinsung:

Ein Kapital K_0 wird jährlich zu p Prozent verzinst. Nach Ablauf eines Jahres wächst das Kapital an auf:

$$K_1 = K_0 + \frac{p}{100} K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) K_0$$

Rechenbeispiel

Der Wachstumsfaktor a ergibt sich wie folgt:

$$a = 1 + \frac{p}{100}$$

für Wachstum

$$a = 1 - \frac{p}{100}$$

für Zerfall

Wegen $k = \ln(a)$, lässt sich hieraus k angeben:

$$k = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

bei Wachstum

$$k = \ln\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

bei Zerfall

Rechenbeispiel

Nach einem Jahr sind etwa 2,3% des chemischen Element Cäsium zerfallen.

1. Bestimme die Wachstumskonstante k und die Halbwertszeit t_H .
2. Nach welcher Zeit sind mindestens 90% zerfallen?

Lösung

$$1. \quad a = 1 - \frac{2,3}{100} = 0,977 \Rightarrow k = \ln(a) \approx -0,0233$$
$$\Rightarrow \underline{t_H} = \frac{-\ln(2)}{-0,0233} \approx \underline{29,78}$$

2. Hier gilt es zwei Hürden zu überwinden!
Erstens fehlt scheinbar die Angabe eines Anfangsbestands.
Zweitens rechnet die Wachstumsformel mit Beständen und nicht mit bereits zerfallenem Material!

Wenn 90% (des Anfangsbestands) zerfallen sein sollen, dann bleiben noch 10% nicht zerfallenes Material übrig (gerechnet wird mit Beständen).

Lösung

Das liefert den Ansatz: $0,1f(0) = f(0) \cdot e^{-0,0233t}$.

Nun kürze $f(0)$:

$$\begin{aligned} 0,1 &= e^{-0,0233t} & | \ln \\ -0,0233t &= \ln(0,1) & | : -0,0233 \\ t &= \frac{\ln(0,1)}{-0,0233} \approx 98,82 \end{aligned}$$

Nach etwa 99 Jahren sind mindestens 90% des Materials zerfallen.

Sie sehen: Den Anfangsbestand haben wir gar nicht gebraucht!

Aufgabe 1

Radioaktives Jod 131 hat einen Zerfallsfaktor von $a = 0,917$.

Die Zeit t wird in Tagen gemessen, die Mengen in Gramm.

- a) Bestimmen Sie das Zerfallsgesetz für eine anfängliche Menge Jod von 10g.
- b) Bestimmen Sie die Halbwertszeit.
- c) Eine Probe enthält zu Beobachtungsbeginn 8g Jod. Wie viel ist davon nach 16 Tagen noch vorhanden?

Lösung Aufgabe 1

- a) Mit $c = 10$ und $k = \ln(a) = \ln(0,917) \approx -0,08665$ folgt
 $f(t) = ce^{kt} = 10e^{-0,08665t}$.

Ergebnis: Das Wachstumsgesetz lautet $f(t) = 10e^{-0,08665t}$.

- b) Die Halbwertszeit ist gegeben durch

$$t_H = -\frac{\ln(2)}{k} = -\frac{\ln(2)}{-0,08665} \approx 8.$$

Ergebnis: Jod 131 hat eine Halbwertszeit von etwa 8 Tagen.

Lösung Aufgabe 1

Methode 1 (GTR):

Für $t = 16$ erhalten wir $f(16) = 2$.

Methode 2 (mit Halbwertszeit):

Aus Teilaufgabe b) kennen wir die Halbwertszeit $t_H = 8$ (Tage).

Nach 16 Tagen ist die Halbwertszeit zweimal abgelaufen, d.h. die ursprüngliche Menge hat sich in dieser Zeit zweimal halbiert und beträgt nunmehr 2g.

Ergebnis: Nach 16 Tagen sind bei einer ursprünglichen Menge von 8g Jod 131 nur noch 2g übrig.

Aufgabe 2

Eine Bakterienkultur enthält zu Beobachtungsbeginn 1500 Bakterien.

Nach jeweils 4 Stunden vervierfacht sich die Anzahl der Bakterien.

- a) Bestimmen Sie einen Funktionsterm, das diesen Wachstumsvorgang beschreibt.
- b) Wieviele Bakterien enthält die Kultur nach 2 Stunden?
- c) Wie lange dauert es, bis sich die Anzahl der Bakterien verdreifacht hat?

Lösung Aufgabe 2 a)

- a) Der Funktionsterm lässt sich auf verschiedene Arten bestimmen.

Erste Methode:

Wir gehen von einem beliebigen Zeitpunkt t aus.

Vier Stunden später, also zum Zeitpunkt $t + 4$ haben wir den vierfachen Bestand.

Somit liefert uns der Ansatz $4 \cdot f(t) = f(t + 4)$ eine Gleichung, über die wir k und damit den Funktionsterm bestimmen können.

Die zweite Methode erscheint uns jedoch etwas einfacher!

Lösung Aufgabe 2 a)

Zweite Methode:

Eine Vervierfachung bedeutet, dass in diesen 4 Stunden zwei Verdopplungsperioden durchlaufen wurden.

Somit dauert eine Verdopplungsperiode 2 Stunden.

Mit $t_V = \frac{\ln(2)}{k}$ folgt $2 = \frac{\ln(2)}{k}$ und damit $k = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,3466$.

Mit $c = 1500$ folgt nun das ...

Ergebnis:

Das Wachstumsgesetz ist gegeben durch $f(t) = 1500e^{0,3466t}$.

Lösung Aufgabe 2 b)

Wie oben beschrieben dauert eine Verdopplungsperiode 2 Stunden.

Nach Ablauf dieser Zeitspanne haben wir somit den doppelten Anfangsbestand, also 3000 Bakterien

Ergebnis:

Nach 2 Stunden enthält die Bakterienkultur 3000 Bakterien.

$$c = 1500$$

$$f(t) = 1500e^{0,3466t}$$

Lösung Aufgabe 2 c)

Der dreifache Wert des Anfangsbestands beträgt 4500 Bakterien.

Gemäß dem obigen Wachstumsgesetz gilt somit $4500 = 1500e^{0,3466t}$.

Dies lässt sich nach t auflösen, was uns $t \approx 3,168$ auf eine Nachkommastelle gerundet $t = 3,2$ liefert.

Ergebnis:

Nach etwa 3,2 Stunden (also 3 Stunden und 12 Minuten) verdreifacht sich die Anzahl der Bakterien in der Kultur.

Aufgabe 3

Eine Bakterienkultur benötigt für einen Zuwachs um 25% exakt 30 Minuten.

Die Zeit t werde hier in Stunden gemessen.

Bei Beobachtungsbeginn wurden 2200 Bakterien gezählt.

- a) Bestimmen Sie einen Funktionsterm für das Wachstumsgesetz.
- b) Wie groß ist die Bakterienkultur nach 4 Stunden?

Lösung Aufgabe 3 a)

Aus dem Prozentsatz $p = 25\% = 0,25$ ergibt sich der Wachstumsfaktor $a = 1 + 0,25 = 1,25$ und daraus die Wachstumskonstante $k = \ln(a) = \ln(1,25) \approx 0,223$.

Da der Zeitschritt in Stunden gemessen werden soll, der Zuwachs sich aber nur auf eine halbe Stunde bezieht, müssen wir im Wachstumsgesetz $f(t) = ce^{kt}$ das t durch $2t$ ersetzen! Wir können den Faktor 2 gleich in das k "hineinmultiplizieren" und erhalten das neue $k \approx 0,446$ für den "Stunden"-Zeitschritt. Mit dem Anfangsbestand $c = 2200$ folgt das ...

Ergebnis: Das Wachstumsgesetz der Bakterienkultur lautet

$$\underline{f(t) = 2200e^{0,446t}.$$

Lösung Aufgabe 3 b)

Gesucht war der Bestand nach 4 Stunden. Durch Einsetzen von $t = 4$ in das Wachstumsgesetz $f(t) = 2200e^{0,446t}$ erhalten Sie mit dem GTR $f(4) \approx 13098$.

Ergebnis:

Nach 4 Stunden befinden sich 13098 Bakterien in der Kultur.